

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ПУЛЮЯ

**Кафедра математичних
методів в інженерії**

НАВЧАЛЬНА ПРАКТИКА

**методичні вказівки для бакалаврів спеціальності 124 - «Системний аналіз»
до проходження практики**

Тернопіль
2024

Укладачі: доктор фіз.-мат. наук, професор В.А. Кривень;

Рецензенти: доктор техн. наук, професор М.В. Приймак
канд. фіз. - мат. наук, доцент М.С. Михайлишин,

Відповідальний за випуск В.А. Кривень.

Методичні вказівки розглянуто й схвалено на засіданні кафедри математичних методів в інженерії. Протокол № 1 від 30.08.2024 р.

Рекомендовано до друку методичною радою факультету електронних апаратів і комп'ютерних систем. Протокол № 1 від 02.09.2024 р.

ЗМІСТ	3
ВСТУП.....	4
1.Мета і завдання навчальної практики.....	5
2. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИКИ.....	7
2.1. Схема проходження практики.....	7
2.2.Термін, тривалість та порядок проходження практики..	8
2.3. Місце проведення практики.....	8
3. ЗМІСТ ПРАКТИКИ.....	9
4. ФОРМИ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ.....	10
5. ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ ПРАКТИКИ.....	11
5.1. Приклади розв’язування задачі.....	11
6. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ.....	15
7. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	18
8. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ.....	19
ДОДАДОК.....	20
ЛІТЕРАТУРА.....	26

ВСТУП

Навчальна практика відноситься до дисциплін професійної підготовки за освітньо-професійною програмою підготовки першого рівня вищої освіти (бакалавр). Галузь знань: 12 «Інформаційні технології». Спеціальність: 124 – «Системний аналіз». Вона являє собою вид навчальних знань, безпосередньо орієнтованих на професійну-практичну підготовку здобувачів вищої освіти.

Навчальна практика студентів першого курсу націлена на отримання ними первинних професійних вмінь і навичок, в тому числі здобуття навичок науково-дослідної роботи.

Навчальна практика спрямована перш за все на закріплення знань, вмінь і навичок, отриманих при вивченні дисциплін математичного профілю і програмування.

У даних методичних вказівках містяться опис мети і задач навчальної практики, етапів її проведення, вимог до змісту і оформлення звіту з практики, форми та методу контролю, критерії оцінювання а також індивідуальні завдання.

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ПРАКТИКИ

Метою навчальної практики є закріплення та поглиблення знань, отриманих студентами в процесі вивчення певного циклу професійно-орієнтованих навчальних дисциплін, придбання навичок створення програмного продукту.

Завдання практики полягає у набутті студентами початкових навичок професійної діяльності, ознайомлення з методами розробки програмних продуктів та супровідної документації та формуванні професійних знань і навичок, що сприятимуть практичній роботі.

Процес проходження практики спрямований на формування таких **компетентностей**:

K01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

K02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

K03. Здатність планувати і управляти часом.

K04. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.

K05. Здатність спілкуватися державною мовою усно і письмово.

K07. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел

K08. Здатність бути критичним і самокритичним.

K09. Здатність до адаптації та дії в новій ситуації.

K10. Здатність працювати автономно.

K11. Здатність генерувати нові ідеї (креативність)

K12. Здатність працювати в команді.

K14. Здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт

K15. Здатність реалізувати свої права і обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності громадянського (вільного демократичного) суспільства та необхідність його сталого розвитку, верховенства права, прав і свобод людини і громадянства України.

K16. Здатність зберігати та примножувати моральні, культурні, наукові цінності і досягнення суспільства на основі розуміння історії та закономірностей розвитку предметної області, її місця у загальній системі знань про природу і суспільство та у розвитку суспільства, техніки і технологій, використовувати різні види та

форми рухової активності для активного відпочинку та ведення здорового способу життя

K16¹. Здатність ухвалювати рішення та діяти, дотримуючись принципу неприпустимості корупції та будь-яких інших проявів недоброчесності.

K20. Здатність визначати основні чинники, які впливають на розвиток фізичних, економічних, соціальних процесів, виокремлювати в них стохастичні та невизначені показники, формулювати їх у вигляді випадкових або нечітких величин, векторів, процесів та досліджувати залежності між ними.

K23. Здатність використовувати сучасні інформаційні технології для комп'ютерної реалізації математичних моделей та прогнозування поведінки конкретних систем а саме: об'єктно-орієнтований підхід при проектуванні складних систем різної природи, прикладні математичні пакети, застосування баз даних і знань.

K26. Здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження і аналізувати дані, отримані в них.

K27. Здатність системно аналізувати свою професійну і соціальну діяльність, оцінювати накопичений досвід.

Програмні результати навчальної практики:

ПР01. Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу.

ПР10. Знати архітектуру сучасних обчислювальних систем і комп'ютерних мереж.

ПР15. Розуміти українську та іноземну мови на рівні, достатньому для обробки фахових інформаційно-літературних джерел, професійного усного і письмового спілкування, написання текстів за фаховою тематикою.

ПР16. Розуміти і реалізувати свої права і обов'язки як члена суспільства, усвідомлювати цінності вільного демократичного суспільства, верховенства права, прав і свобод людини і громадянина в Україні.

ПР17. Зберігати та примножувати досягнення і цінності суспільства на основі розуміння місця предметної області у загальній системі знань, використовувати різні види та форми рухової активності для ведення здорового способу життя.

ПР17.1. Знати, уміти ухвалювати рішення та діяти у відповідності до принципу неприпустимості корупції та будь-яких інших проявів недоброчесності в середовищі здобувачів освіти та при провадженні професійної діяльності.

2. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИКИ

2.1. Схема проходження практики

Загальну організацію та контроль за її проведенням практики здійснює на керівник практики – викладач кафедри. Навчальна практика проводиться на базі кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, де є необхідне обладнання для успішного її проведення.

Основні обов'язки студентів під час практики полягають у оволодінні професійними навичками, закріпленні теоретичних знань та умінь. Студенти суворо зобов'язані дотримуватися Правил охорони праці установи, де вони проходять практику. Керівник практики зобов'язаний провести відповідні інструктажі, забезпечити студентів роботою, визначити, що виконувани студентами на практиці роботи відповідають профілю навчання та не є шкідливими для здоров'я студентів.

Студенти-практиканти під час проходження практики зобов'язані

- У повному обсязі виконувати завдання викладача, передбачені навчальною практикою;
- Відвідувати усі заняття за розкладом практики;
- Дотримуватися правил внутрішнього розпорядку;
- Виконувати програму практики згідно з календарним планом робіт;
- У визначений термін оформити звіт і скласти залік з практики;

Керівник навчальної практики зобов'язаний:

- Провести інструктаж з техніки безпеки;
- Сформулювати теоретичні і практичні завдання для студентів;
- Надати необхідні роз'яснення для виконання завдань;
- У визначений термін перевірити звіт та скласти відгук.

2.2. Термін, тривалість та порядок проходження практики

Відповідно до графіку начального процесу навчальна практика проходить у другому семестрі і триває 2 тижні. Перед початком практики проводяться консультаційні збори, на котрих видається завдання практики, надається уся необхідна інформація з порядку її проведення. До завершення практики студенти повинні оформити звіт, титульний аркуш якого підписується студентом та керівником практики від університету.

2.3. Місце проведення практики

Практика проводиться на базі кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, де є усі умови для успішного її проведення. Практична підготовка студентів, які навчаються за дистанційною формою, відбувається із використанням технологій дистанційного навчання з використанням відповідних веб-ресурсів.

3. ЗМІСТ ПРАКТИКИ

Навчальна практика закріплює отримані теоретичні і практичні знання впродовж курсу навчання і включає:

- Набуття навичок роботи з сучасними операційним та прикладним програмним забезпеченням ПК;
- Виконання індивідуальних завдань керівника практики.
- Оформлення результатів практики у вигляді звіту.

Студенти проходять практику у відповідності з календарним графіком ((Д.Таблиця 1), який містить етапи робіт.

Таблиця 1.

№	Етап та зміст роботи	Термін
1.	Інструктаж з техніки безпеки	На початку практики
2.	Закріплення робочих місць за студентами-практикантами.	На початку практики
3.	Отримання і погодження завдання практики	Перших 2 дні
4.	Вивчення літератури	2-5 день
5.	Виконання завдання	6-12 дні
6.	Оформлення звіту	13-14 дні

4. ФОРМИ ТА МЕТОДИ КОНТРОЛЮ

Наприкінці практики поводитьсь підбиття підсумків практики та складання заліку. Студенти надають заповнені Щоденники практики, засвідчені підписом керівника практики та печатками установ, звіти про проведену під час практики роботу та індивідуальні завдання.

Звіт перевіряється та затверджується керівником практики від навчального закладу. Звіт і Щоденник зберігаються на кафедрі математичних методів в інженерії.

Структура звіту з навчальної практики:

- Титульний аркуш (див. приклад оформлення у Додатку 1)
- Зміст
- Вступ
- Основна частина
- Висновки
- Список використаних джерел
- Додатки (за потреби)

5. ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ ПРАКТИКИ

Завдання: Системний аналіз алгебраїчних ліній другого порядку

Завдання практики складається з трьох розділів:

1. Загальна теорія алгебраїчних ліній другого порядку.
2. Приклад пошуку системи найпростішого рівняння лінії
3. Графічна ілюстрація заданої лінії у вихідній та перетвореній системах координат

5.1. Приклади розв'язування задачі

5.11.1. Приведіть до канонічного виду рівняння й визначте вид кривої:
 $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

Розв'язання:

Виділимо в даному рівнянні повні квадрати. Для цього перенесемо вільний член 8 вправо, додамо до обох частин рівняння 8 і згрупуємо доданки, виділяючи повні квадрати по кожній змінній: $(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 8y + 1) = 16$, звідки $(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 16$ або $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. Одержали рівняння еліпса із центром у точці $(-2;1)$ й півосями, що дорівнюють: $a = 4$ і $b = 2$.

1. Який вид прийме рівняння кривої $xy - 6x + 2y + 3 = 0$, якщо перенести початок координат у точку $O'(-2;6)$, не змінюючи напрямку осей координат?

Розв'язання:

Якщо, не змінюючи напрямку осей координат, перенести початок координат у будь-яку точку $O'(x'; y')$, то рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

перетвориться в наступне:

$$\begin{aligned} & a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2F_{x'}X + 2F_{y'}Y + 2F' = 0, \\ & \begin{cases} 2F' = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}, \\ 2F_{x'} = 2(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}), \\ 2F_{y'} = 2(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}), \end{cases} \end{aligned}$$

тобто коефіцієнти при старших членах не зміняться, а коефіцієнтами при перших ступенях координат будуть часткові похідні від лівої частини вихідного рівняння по відповідних до координат із заміною поточних координат

координатами нового початку; вільний член представляє всю ліву частину вихідного рівняння, у якій зроблена та ж заміна.

Перенесемо початок координат у точку $O'(-2;6)$, тоді рівняння кривої $xy - 6x + 2y + 3 = 0$ буде мати вигляд $xy + 15 = 0$, тому що

$$\begin{cases} 2F' = x'y' - 6x' + 2y' + 3, \\ 2F_{x'} = y' - 6, \\ 2F_{y'} = x' + 2. \end{cases}$$

2. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0$.

Розв'язання:

У загальному рівнянні кривої присутній член xy , тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22} = 3 \neq a_{11} = 5$, тому

$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot (-2\sqrt{2})}{5-3} = -2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$, використовуючи формули:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad \text{Отримаємо:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2} \right\}, \text{ а } \sin \varphi \text{ і } \cos \varphi \text{ візьмемо, наприклад, } \sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}, \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\varphi = 54,74^\circ$$

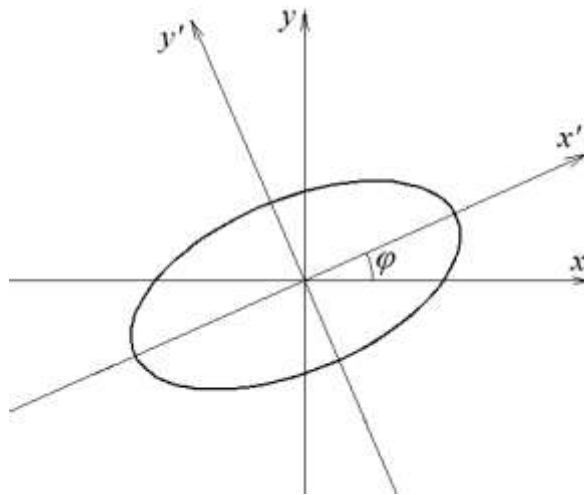


Рис. Лінія у вихідній і перетвореній системах координат.

Запишемо формули перетворення:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x} - \bar{y}\sqrt{2}), \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x}\sqrt{2} + \bar{y}), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2 + 21\bar{y}^2 - 42 = 0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{14} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

– рівняння еліпса з центром в початку координат та півсями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{2}$,

при цьому системи координат пов'язані формулами:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x\sqrt{3}}{3} + \frac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \bar{y} = -\frac{x\sqrt{6}}{3} + \frac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

5.2. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи теорію квадратичних форм:

$$5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0.$$

Розв'язання:

Випишемо матрицю старших членів:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda) - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} + I \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$4x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 1$ власний вектор $\bar{a}_1 = c_1(\sqrt{2}; 2)$, $c_1 = \text{const} \neq 0$, який після нормування буде: $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

При $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} - I \cdot \sqrt{2} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 7$ власний вектор $\bar{a}_2 = c_2(-2; \sqrt{2})$, $c_2 = \text{const} \neq 0$, який після нормування буде: $\bar{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні ((Д. $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$), тому запишемо матрицю перетворення координат ((Д.вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ розмістимо по стовпцях):

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Тоді формули перетворення координат матимуть вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{y}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази у рівняння кривої, спростимо його. Отримаємо:

$$\bar{x}^2 + 7\bar{y}^2 - 42 = 0,$$

$$\frac{\bar{x}^2}{42} + \frac{\bar{y}^2}{6} = 1 - \text{еліпс}.$$

6. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ЗВЕДЕННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИДУ

Алгоритм реалізовано у системі комп'ютерної алгебри .

> restart; #<https://qaweb.dev/calc-ua/634-second-order-curves-ua>

$$x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x - 2y + 8 = 0$$

$A := 1 : B := 1 : C := -2 : E := 4 : F := -2 : G := 8 :$

> $f := A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + E \cdot x + F \cdot y + G :$

$\text{printf}(\text{"\%a \n"}, f = 0);$

if $B^2 - A \cdot C < 0$ **then** $\text{print}(ELIPS)$ **fi**; **if** $B^2 - A \cdot C > 0$
then $\text{print}(GIPERBOL)$; **fi**;

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot y^2 + 4 \cdot x - 2 \cdot y + 8 = 0$$

GIPERBOL

> $r11 := \text{diff}(f, x) = 0 : r12 := \text{diff}(f, y) = 0 : \text{printf}(\text{"\%a \%a \n"}, r11, r12);$

$T := \text{solve}(\{r11, r12\}, \{x, y\}) : \text{assign}(T) : x0 := x : y0 := y :$

$\text{printf}(\text{"x0=\%a y0=\%a \n"}, x0, y0); x := 'x' : y := 'y' :$

$R1 := \text{subs}(\{x = x1 + x0, y = y1 + y0\}, f) : R1 := \text{simplify}(\%) :$

$\text{printf}(\text{"\%a \n"}, R1 = 0);$

$$\varphi0 := \text{evalf}\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \cdot B}{A - C}\right)\right) :$$

$$\text{printf}\left(\text{"angle=\%a \%a \n"}, \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2 \cdot B}{A - C}\right), \frac{\varphi0 \cdot 180}{3.14}\right);$$

$a11 := \text{evalf}(\cos(\varphi0)) : a12 := -\text{evalf}(\sin(\varphi0)) :$

$\text{printf}(\text{"a11=\%a a12=\%a \n"}, a11, a12);$

$R11 := \text{subs}(\{x1 = x2 \cdot a11 + y2 \cdot a12, y1 = -x2 \cdot a12 + y2 \cdot a11\}, R1) :$

$R11 := \text{simplify}(\%) :$

$\text{printf}(\text{"\%a \n"}, R11 = 1);$

$m := -\text{subs}(\{x2 = 0, y2 = 0\}, R11);$

$$a := \frac{\text{diff}(\text{diff}(R11, x2), x2)}{2} : b := \frac{\text{diff}(\text{diff}(R11, y2), y2)}{2} :$$

$$a := \sqrt{-\frac{m}{a}} : b := \sqrt{\frac{m}{b}} :$$

if $a < b$ then $q := a; a := b; b := q$ fi:

$$c := \sqrt{a^2 + b^2} :$$

$$e := \frac{c}{a} : p := \frac{b^2}{a} :$$

$\text{printf}(\text{"a=\%a b=\%a c=\%a e=\%a \n"}, a, b, c, e);$

>

$$\rho := \frac{p}{1 - e \cdot \cos(\varphi + \varphi_0)};$$

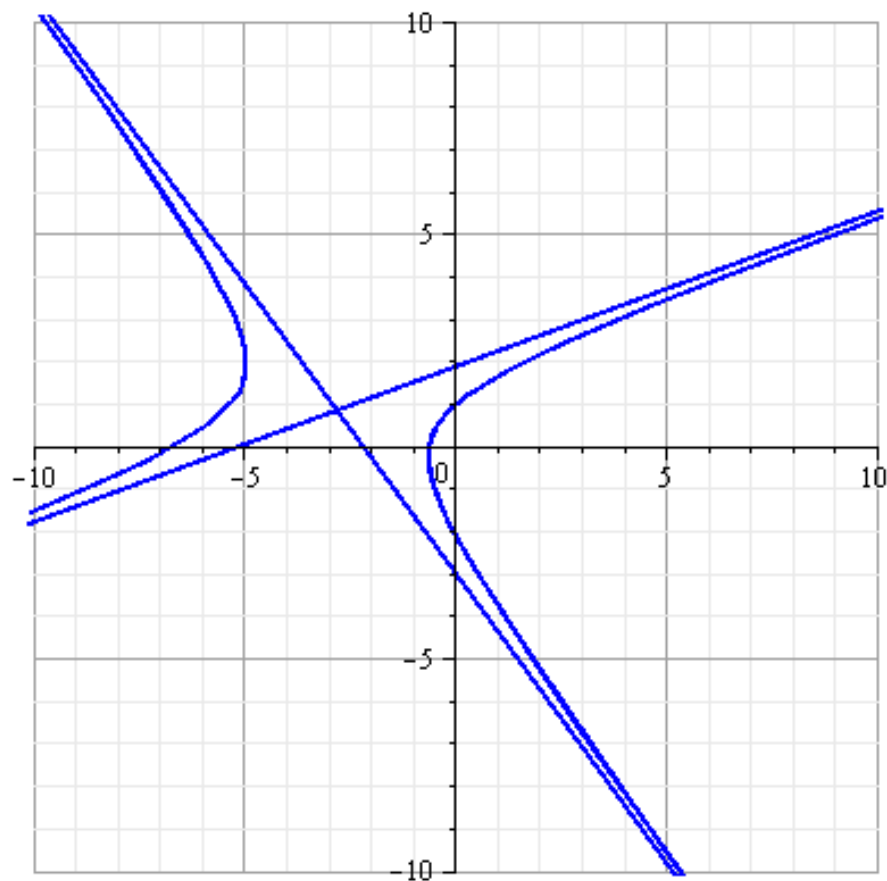
`plot(ρ, φ=-5..6, color=blue, coords=polar, thickness=2, view=[-10..10,-10..10]);`

```
2*x+2*y+4 = 0    2*x-4*y-2 = 0
x0=-1    y0=-1
x1^2+7+2*x1*y1-2*y1^2 = 0
angle=1/2*arctan(2/3) =16.85357781
a11=.9570920265    a12=-.2897841487
1.302775638*x2^2-.5697606218e-10*x2*y2-
2.302775638*y2^2+7. = 1
```

`m:=-7.`

```
a=2.318004132    b=1.743505039    c=2.900509089
e=1.251295910
```

$$\rho := \frac{1.311391028}{1 - 1.251295910 \cos(\varphi + 0.2940013018)}$$



7. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Побудуйте криву у вихідній і перетвореній системах координат ((Д.номер варіанта відповідає журнальному номеру).

1) $5x^2 + 6xy + 2y^2 - 2x + 6y - 18 = 0;$

2) $x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x - 2y + 8 = 0;$

3) $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 3x - 8y + 24 = 0;$

4) $9x^2 - 16xy + 4y^2 - 3x - 6y + 25 = 0;$

5) $6x^2 + 12xy + 4y^2 - 7x + 8y + 21 = 0;$

6) $7x^2 - 8xy + 9y^2 - 9x - 4y + 12 = 0;$

7) $3x^2 - 4\sqrt{6}xy + 5y^2 + 18 = 0;$

8) $2\sqrt{6}xy + 5y^2 + 6 = 0;$

9) $9x^2 + 8\sqrt{3}xy + 6y^2 - 36 = 0;$ 1

0) $5x^2 + 12xy - 19 = 0.$

8. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Для прийняття заліку завідувачем кафедри призначається комісія. Оцінювання проходить за національною та 100-бальною шкалою і шкалою TCTS. Оцінка враховує:

- Повноту і якість виконання завдання.
- Відповідність звіту програмі практики та індивідуальному завданню.
- Володіння матеріалом.

Шкали оцінювання: національна та ECTS

Сума балів	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90-100	A	відмінно
82-89	B	добре
75-81	C	
68-74	D	задовільно
61-67	E	
35-59	FX	незадовільно
0-34	F	

ДОДАТОК 1. ТЕОРІЯ ЛІНІЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Д. 1. Загальне рівняння лінії другого порядку

Алгебраїчною кривою другого порядку на площині називається множина всіх точок площини, координати яких задовольняють рівнянню:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (\text{Д.1})$$

Вираз $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ називається *квадратичною частиною*, $2a_{13}x + 2a_{23}y$ — *лінійною частиною*, a_{33} — *вільним членом* рівняння.

Точка M називається *центром кривої* другого порядку, якщо при центральній симетрії відносно точки M крива переходить в себе.

Для того, щоб точка $M(x_0, y_0)$ була центром кривої другого порядку необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0) = 0, \\ F_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \quad (\text{Д.2})$$

При цьому, якщо система (Д.2) має єдиний розв'язок, то крива називається *центральною*. Тому ознакою центральної кривої є

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Користуючись канонічними рівняннями кривих другого порядку неважко з'ясувати, що еліпс і гіпербола — центральні криві, парабола не має центра, дві паралельні прямі мають нескінченну кількість центрів — пряму центрів (див. таблицю).

Пряма, що проходить через центр кривої та має асимптотичний напрямок, називається *асимптотою* кривої другого порядку. Отже, гіпербола має дві асимптоти, а еліпс та парабола жодної.

Діаметром лінії другого порядку називається геометричне місце середин всіх хорд, паралельних даному вектору не асимптотичного напрямку.

Ортогональним інваріантом загального рівняння (Д.1) лінії другого порядку відносно перетворення декартової системи координат назовемо функцію $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$, значення якої не змінюється при переході до нової декартової системи координат.

Теорема. Три функції

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = S \text{ — слід матриці } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta - \text{малий визначник лінії (Д.1),}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta - \text{великий визначник лінії (Д.1)}$$

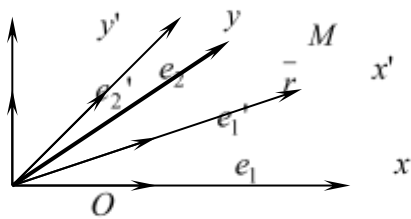
є ортогональними інваріантами лінії другого порядку (Д.1).

Вираз: $K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називається *напівінваріантом* (семиінваріантом) лінії (Д.1). Рівняння $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ називається характеристичним рівнянням лінії Д(Д.1).

Теорема. Корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння кривої другого порядку завжди дійсні.

Д.2. Перетворення декартової системи координат на площині. Нехай на площині задано два базиси (e_1, e_2) та (e'_1, e'_2) , які визначають дві декартові системи координат Oxy та $Ox'y'$ відповідно. Нехай змінна точка M площини має координати (x, y) та (x', y') в системах координат Oxy та $Ox'y'$ відповідно. Позначимо через $\bar{r}$ радіус-вектор точки M , так що

$$\bar{r} = xe_1 + ye_2 = x'e'_1 + y'e'_2. \quad (\text{Д.3})$$



Розкладемо кожний з векторів базису e'_1, e'_2 за векторами базису (e_1, e_2)

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \end{cases} \quad (\text{Д.4})$$

((Д.35))

і підставимо отримані розклади в рівність (Д.3):

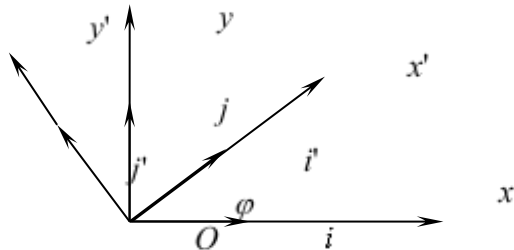
$$\begin{aligned} r &= xe_1 + ye_2 = x'e'_1 + y'e'_2 = x'(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + y'(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y')e_1 + (a_{21}x' + a_{22}y')e_2. \end{aligned}$$

Звідси,

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases} \quad ((\text{Д.5}))$$

Рівності ((Д.4) називаються формулами переходу до іншого базису, а рівності ((Д.5) – формулами переходу до іншої системи координат.

Д.3. Поворот системи координат. Розглянемо окремий випадок перетворення декартової системи координат, який полягає у повороті на деякий кут φ прямокутної декартової системи координат Oxy .



Нехай прямокутна декартова система координат $Ox'y'$ з базисом (i', j') отримується поворотом на кут φ прямокутної декартової системи координат Oxy з базисом (i, j) . Оскільки координатами одиничного вектора є його напрямні

косинуси, то

$$i' = \left\{ \cos \varphi, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right\} = \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}$$

$$j' = \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right), \cos \varphi \right\} = \{ -\sin \varphi, \cos \varphi \}.$$

Тоді формули ((Д.4), ((Д.5) набувають вигляду

$$\begin{cases} i' = i \cos \varphi + j \sin \varphi \\ j' = -i \sin \varphi + j \cos \varphi \end{cases}$$

((Д.6)

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

((Д.7)

Д.4. Паралельне перенесення системи координат. Нехай система координат $O'x'y'$ отримується перенесенням системи координат Oxy так, що початок координат O переходить в точку O' , яка має координати (x_0, y_0) в системі координат Oxy , а осі координат $O'x'$, $O'y'$ паралельні до осей Ox , Oy відповідно. Тоді, з рисунка, для змінної точки M , яка має координати (x, y) в системі Oxy та координати (x', y') в системі $O'x'y'$, справджуються рівності

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad ((Д.8)$$

Формули ((Д.8) називаються формулами паралельного перенесення системи координат.

Д.5. Класифікація кривих другого порядку. Кривою другого порядку називається лінія на площині координати (x, y) кожної точки якої в деякій прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівняння

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad ((Д.9))$$

Рівняння ((Д.9)) називається загальним рівнянням кривої другого порядку.

Позначимо $\delta = AC - B^2$. Крива другого порядку називається кривою гіперболічного типу, якщо $\delta < 0$; якщо $\delta = 0$, то крива називається кривою параболічного типу; у випадку $\delta > 0$ крива називається кривою еліптичного типу.

Д.6. Спрощення загального рівняння поворотом системи координат. Рівнянню ((Д.9)) завжди можна надати вигляду

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \quad ((Д.10))$$

в системі координат $Ox'y'$, яка отримується поворотом системи координат Oxy на певний кут. Справді, підставимо в рівняння ((Д.9)) замість x, y їх значення з рівностей ((Д.7)):

$$A(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 2B(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + C(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + 2DA(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) + 2E(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + F = 0.$$

Знайдемо половину коефіцієнта $2B'$ при добутку $x'y'$:

$$B' = -A \sin \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + C \sin \varphi \cos \varphi,$$

або

$$B' = B \cos 2\varphi - \frac{A-C}{2} \sin 2\varphi.$$

Виберемо кут φ так, щоб $B' = 0$. Тоді

$$B \cos 2\varphi = \frac{A-C}{2} \sin 2\varphi.$$

Якщо $A = C$, то $\cos 2\varphi = 0$ і звідси $2\varphi = \frac{\pi}{2}$, або $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Якщо ж $A \neq C$, то $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C}$, тобто $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A-C}$.

Д.7. Спрощення рівняння паралельним перенесенням системи координат. Якщо в рівняння входить квадрат однієї з координат з ненульовим коефіцієнтом, то за допомогою паралельного перенесення системи координат вздовж відповідної осі можна добитися, щоб коефіцієнт при першому степені цієї

координати перетворився в нуль. Справді, нехай $A' \neq 0$. Тоді в рівнянні можна виділити повний квадрат при коефіцієнті A' :

$$A' \left(x'^2 + 2 \frac{D'}{A'} x' + \left(\frac{D'}{A'} \right)^2 \right) + C' y'^2 + 2E' y' + F - \left(\frac{D'}{A'} \right)^2 = 0.$$

Виконаємо паралельне перенесення системи координат за формулами

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{D'}{A'} \\ y'' = y' \end{cases}.$$

Рівняння кривої набуде вигляду

$$A' x''^2 + C' y''^2 + 2E' y'' + F' = 0,$$

$$\text{де } F' = F - \left(\frac{D'}{A'} \right)^2.$$

Д.8. Криві еліптичного типу. Нехай для рівняння ((Д.9)) $\delta = AC - B^2 > 0$, тобто рівняння ((Д.9)) задає криву еліптичного типу. Зрозуміло, що поворот на кут φ системи координат не змінює самої кривої, тобто не змінює її типу. Звідси, для рівняння кривої ((Д.10)) $\delta = A'C' > 0$, тому $A' \neq 0$, $C' \neq 0$ і коефіцієнти A' , C' мають однакові знаки. Двократним застосуванням перетворень п.6, один раз відносно координати x' , а другий раз відносно y' , рівнянню ((Д.9)) можна надати вигляду

$$A' x''^2 + C' y''^2 + F' = 0. \quad ((Д.11))$$

Якщо $F'' \neq 0$ і знак F'' не збігається зі знаком A' та C' , то рівнянню ((Д.11)) можна надати вигляду

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{де } a^2 = -\frac{F''}{A'}, \quad b^2 = -\frac{F''}{C'}, \text{ тобто рівняння ((Д.38)) задає еліпс.}$$

Якщо $F'' \neq 0$ і знак F'' збігається зі знаком A' та C' , то рівняння ((Д.11)) зводиться до рівняння уявного еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a^2 = \frac{F''}{A'}, \quad b^2 = \frac{F''}{C'},$$

яке не визначає жодної дійсної точки.

Якщо ж $F'' = 0$, то з рівняння ((Д.11)) отримуємо рівняння пари уявних прямих

$$a^2 x''^2 + b^2 y''^2 = 0, \quad a^2 = |A'|, \quad b^2 = |C'|,$$

яке визначає одну дійсну точку.

Д.9. Криві гіперболічного типу. Нехай тепер для кривої ((Д.38) $\delta = AC - B^2 < 0$, що рівносильно тому, що для тої самої кривої, заданої рівнянням ((Д.39), $\delta = A'C' < 0$. Звідси, $A' \neq 0$, $C' \neq 0$ і A' та C' мають супротивні знаки. Як і в попередньому пункті, двократним застосуванням паралельного перенесення системи координат вздовж осей Ox' та Oy' рівнянню ((Д.39) можна надати вигляду ((Д.11).

Якщо $F'' \neq 0$, то можна вважати, що знак F'' збігається зі знаком коефіцієнта C' . Тоді з рівняння ((Д.11) отримуємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{де } a^2 = -\frac{F''}{A'}, \quad b^2 = \frac{F''}{C'}.$$

Якщо ж $F'' = 0$, то рівняння ((Д.11) має вигляд

$$a^2 x''^2 - b^2 y''^2 = 0, \quad a^2 = |A'|, \quad b^2 = |C'|,$$

і визначає пару прямих $ax'' - by'' = 0$ та $ax'' + by'' = 0$, які перетинаються.

Д.10 Криві параболічного типу. Нехай тепер рівняння ((Д.8) задає криву параболічного типу, тобто $\delta = AC - B^2 = 0$. Для рівняння ((Д.39) тої самої кривої $\delta = A'C' = 0$. Тоді або $A' = 0$, або $C' = 0$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $A' = 0$, $C' \neq 0$. Тоді паралельним перенесенням системи координат вздовж осі Oy' рівняння ((Д.9) зводиться до рівняння

$$C'y''^2 + 2D'x'' + F'' = 0. \quad ((Д.12)$$

Нехай $D' \neq 0$. Тоді останньому рівнянню можна надати вигляду

$$C'y''^2 + 2D'\left(x'' + \frac{F''}{2D'}\right) = 0.$$

Виконавши паралельне перенесення системи координат

$$\begin{cases} x^* = x'' + \frac{F''}{2D'} \\ y^* = y'', \end{cases}$$

дістаємо

$$y^{*2} = 2px^*, \quad p = -\frac{D'}{C'}.$$

Це канонічне рівняння параболи.

Якщо ж $D' = 0$, то рівняння ((Д.12) має вигляд

$$C'y''^2 + F'' = 0. \quad (\text{Д.13})$$

Нехай $F'' \neq 0$ і коефіцієнти C' та F'' мають різні знаки. Тоді рівняння ((Д.13) має вигляд

$$y''^2 - a^2 = 0, \quad a^2 = \frac{|F''|}{|C'|},$$

і визначає пару паралельних прямих $y'' - a = 0$ та $y'' + a = 0$.

Якщо ж $F'' \neq 0$ і коефіцієнти C' , F'' мають однакові знаки, то рівняння ((Д.13) має вигляд

$$y''^2 + a^2 = 0,$$

яке визначає пару уявних паралельних прямих.

Література

1. Борисенко, О.А. Аналітична геометрія: Навчальний посібник / О.А. Борисенко, Л.М. Ушакова – Х. : Основа, 1993. – 192 с
2. Кривень В.А, Методичні вказівки до виконання навчальної практики/ Тернопіль:ТНТУ.2022 – 18с.
3. Дрозденко В.О. Maple в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації / В.О.Дрозденко. – Біла Церква, 2019. – 328с.
4. ДСТУ 3008-95 Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення.